**3. BASİT SİSTEM ELEMANLARI ve EMPEDANS**

**3.1. Hedefler:**

1. Sistemlerin temel elemanlarının tanıtılması.
2. Fizik kanunları kullanılarak sistemlerin matematiksel modellerinin elde edilmesi.
3. Mekaniksel bir sistemin elektriksel karşılığının incelenmesi.

Fiziksel sistemler:

* Elektrik sistemleri
* Mekanik Sistemler
* Akışkan Sistemleri
* Isıl Sistemler

olmak üzere 4 kısımdır. Bu bölümde bu Mekanik ve Elektriksel sistemlere ait basit elemanlardaki neden-sonuç (giriş-çıkış) bağıntıları incelenecektir.

* 1. **Doğrusal (Linear) ve Doğrusal olmayan (Non-linear) Modeller**

Doğrusal sistemler süperpozisyon ilkesinin uygulanabildiği sistemlerdir. Eğer bir sisteme süper pozisyon ilkesi uygulanamıyorsa bu sistem doğrusal değildir. Bu sebepten dolayı, doğrusal olmayan bir sistemin iki farklı giriş sinyaline verdiği cevap, o sistemin her bir giriş sinyaline ayrı ayrı verdiği cevapların toplamı ile bulunamaz. Bu doğrusal sistemlerin analizinde büyük kolaylıklar sağlamaktadır.

Pratikte neredeyse bütün sistemlerin değişkenleri arasında doğrusal olmayan ilişkiler vardır. Örneğin bir elemanın çıkışı büyük giriş sinyalleri için doyma gösterebilir. Buna en güzel örnek bir elektrik motorunun üzerine uygulanan giriş gerilimi artırılsa bile motor milinin maksimum bir hızda dönüş yapabilmesidir. Esnek bir yayın belli aralıklarda doğrusal davranış göstermesine karşın bu aralıktan fazla oranda esnetilmesi durumunda deforme olması da doğrusal olmayan davranışa örnek olarak verilebilir.

Sistemler, analizlerinin kolaylaştırılması açısından bir denge noktası etrafındaki belli çalışma aralıklarında doğrusal kabul edilebilirler. Bunun için sistemin doğrusal olmayan matematiksel modeli o nokta etrafında doğrusallaştırılabilir. Fakat denge noktası etrafındaki çalışma aralığı artırılırsa, doğrusal matematiksel model gerçek sistemin dinamiğini ifade etmeyebilir. Böyle bir durumda doğrusal model gerçek sistemin dinamiğinin analizi ve kontrol uygulamaları için kullanılamaz.

**3.3. Doğrusal olmayan matematiksel modellerin doğrusallaştırılması**

Doğrusal olmayan bir sistemin doğrusal matematiksel modelini elde etmek için, sistem değişkenlerinin belli bir çalışma koşulundan çok az bir sapma gösterdiği kabul edilir. Bağımsız değişkeni veya giriş değişkeni ve çıkış değişkeni olan bir sistem ele alalım.

(3.1)

Eğer normal çalışma koşulu ve ise, (3.1) denklemine bu nokta etrafında Taylor serisi açılımı uygulanabilir:

(3.2)

Eğer küçük ise yüksek mertebeden terimleri ihmal edebiliriz ve denklem (3.2) aşağıdaki hali alır.

(3.3)

Burada,

ve

Denklem (3.3) tekrar düzenlenirse,

(3.4)

Denklem (3.4) ile arasında doğrusal bir orantı olduğunu göstermektedir.

Doğrusallaştırma işlemi çok değişkenli sistemlere de uygulanabilir.

(3.5)

Eğer denklem (3.5) çalışma noktaları etrafında Taylor serisine açılırsa

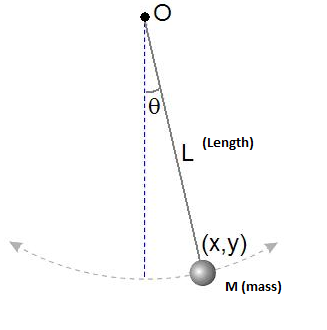
(3.6)

Burada,

) ve

**Örnek:**

Şekil (3.1a)’da ki salınım yapan sarkacın matematiksel modelini elde ediniz ve doğrusallaştırınız.



Şekil. 3.1a. Sarkaç sistemi Şekil 3.1b. Doğrusal ve doğrusal olmayan davranış

Kütle üzerindeki tork

: yerçekimi ivmesi.

Kütle için denge noktası ’dır. T ile arasındaki doğrusal olmayan ilişki Şekil (3.1b)’de gösterilmiştir. Taylor serilerini kullanarak,

Burada . Böylece,

Bu yaklaşımın arasında iyi sonuç verdiği Şekil (3.1b)’den görülmektedir.

**3.4 Transfer Fonksiyonları**

Transfer fonksiyonları, doğrusal sistemlerin (zaman-bağımsız, LTI) giriş-çıkış bağıntılarını karakterize etmek için kullanılır. Bir doğrusal sistemin transfer fonksiyonu tüm başlangıç koşulları sıfır kabul edilerek çıkış değişkeninin Laplace dönüşümünün giriş değişkeninin Laplace dönüşümüne oranı ile elde edilir.

Aşağıdaki diferansiyel denklem ile ifade edilen doğrusal sistemi ele alalım;

Burada, şartı sağlanmalıdır ve y = y(t) sistemin çıkışı, x = x(t) sistemin girişi veya uyarı fonksiyonudur. Bu sistemin transfer fonksiyonunu elde etmek için başlangıç koşulları sıfır kabul edilerek Laplace dönüşümü uygulanırsa

Burada G(s) transfer fonksiyonudur. Transfer fonksiyonunun özellikleri:

1. Transfer fonksiyonu sistemin kendine ait bir özelliktir, sisteme dışarıdan uygulanan giriş sinyalinden bağımsızdır. Sistemin giriş ve çıkışı arasındaki oransal ifadeyi verir fakat sistemin fiziksel özellikleri hakkında bir bilgi içermez. Bu sebepten farklı sistemler aynı transfer fonksiyonuna sahip olabilir.
2. Bir sistemin transfer fonksiyonu sisteme uygulanan birim ani darbe girişinden elde edilen çıkışın Laplace dönüşümüdür.
3. Bir doğrusal sistemin kararlılığı transfer fonksiyonunun paydası olan özyapısal denklemin (Characteristic Equation) sıfıra eşitlenip köklerinin bulunması ile bulunabilir. Bunlara sistemin kutupları (poles) adı verilir. Sonuç olarak transfer fonksiyonunun paydasının tüm kökleri negatif ise sistem kararlıdır. Eğer kutuplardan bir tanesi bile pozitif gerçek kısma sahipse sistem kararsızdır.
4. Transfer fonksiyonunda payın kökleri ise sistemin sıfırları (zeros) olarak adlandırılır. Bunlar transfer fonksiyonunu sıfır yapan değerlerdir. Eğer transfer fonksiyonu çarpanlarına ayrılırsa

Burada,

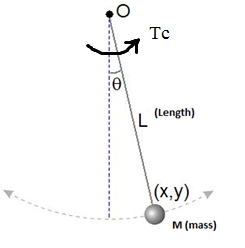
*zm*: Transfer fonksiyonunun sıfırları

*pn*: Transfer fonksiyonunun kutupları

Sistemin sıfırlarının karmaşık düzlemdeki yeri sistemin dinamiğine etki eder fakat kararlılığına etki etmez.

1. Sistemin transfer fonksiyonu biliniyorsa sistemin farklı giriş sinyallerine vereceği cevaplar kolayca çalışılabilir. Eğer bilinmiyorsa da gerçek sisteme bilinen sinyaller uygulanarak sistemin çıkışı elde edilir ve buradan sistemin belirli bir çalışma koşulunda transfer fonksiyonu modeli elde edilebilir (System Identification).

**Örnek:** Bir önceki örnekte ele alınan sarkaç sisteminin hareket denklemini çıkaralım. Tc  sisteme dışarıdan uygulanan moment olsun (sistem girişi) ve çıkış ise sistemin açısal konumu olarak kabul edilsin. Newton yasasını kullanarak dönel sistemin hareket denklemi elde edilebilir.

 ,

burada *I* dönme merkezine göre atalet momentidir. Burada asılı kütle için  yerine konursa sistemin hareket denklemi

Başlangıç koşulları sıfır kabul edilerek denklemin her iki tarafına Laplace dönüşümü uygulanırsa

Şekil 3.2. Sarkaç dış moment etkisinde.

Sistemin çıkışının Laplace dönüşümünün sistemin girişinin Laplace dönüşümüne oranı ile sarkaç sisteminin transfer fonksiyonu aşağıdaki gibi elde edilir:

**3.5 Sistem değişkenlerinin sınıflandırılması ve Temel sistem elemanları**

Tüm bu sistemlerde enerjiyi yutan veya dağıtan direnç elemanı, enerjiyi kapasitif etkiyle depolayan kapasite elemanı ve enerjiyi indüktif etkiyle depolayan indüktans elemanı gibi 3 basit eleman bulunmaktadır. Direnç, kapasite ve indüktans elemanları olarak gruplanan bu iki uçlu elemanlarda **uç değişken** ve **iç değişken** olmak üzere iki temel değişken tanımlanır.

**Uç değişken (e, effort):** Bir elemanın iki ucu arasında bir fark değer olarak ölçülen değişkendir. Uç değişken ilgili elemanın uçları arasına bir ölçü aleti yerleştirilerek ölçülür. Buna göre elektrik sistemlerinde potansiyel farkı, mekanik sistemlerde öteleme veya dönme hızı, akışkan sistemlerde basınç farkı ve ısıl sistemlerde sıcaklık farkı birer uç değişkendir.

**İç değişken (r, rate, flow):** Bir elemanın boyunca her bir noktasında aynı değerde ölçülen değişkendir. İç değişken, bir fiziksel sistemde ilgili fiziksel devre açılıp araya bir ölçü aleti yerleştirilerek ölçülür. Buna göre elektrik sistemlerinde akım, mekanik sistemlerde kuvvet veya moment, akışkan sistemlerde debi ve ısıl sistemlerde ısıl debi birer iç değişkendir.

Tablo 3.1. Sistemlerin uç ve iç değişkenleri

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Sistem | Uç değişken (Across variable) | İç değişken (Through Variable) |
| Elektriksel | e (Gerilim, Voltage, Potential) | I (Akım, Current) |
| Öteleme Mekanik | v (Hız, velocity) | F (Kuvvet, Force) |
| Dönel Mekanik | (Açısal hız, angular velocity) | T (Moment, Torque) |
| Akışkan | P (Basınç, pressure) | q (Debi, Flow rate) |
| Isıl | (Sıcaklık, temperature) | qt (Isıl debi, Heat Flow rate) |

Uç değişken ve iç değişken tanımına dayanarak değişik mühendislik sistemleri için temel büyüklük olan **güç** ifadesini

**Güç = Uç değişken x İç değişken**

 (3.7)

şeklinde yazabiliriz. Çeşitli sistemlerde basit elemanların değişkenleri arasındaki fiziksel bağıntıların benzer olması bu elemanlara ait matematiksel modelinde aynı olmasını sağlamaktadır. Bu durum sistemler arasındaki temel benzerlikleri ortaya koymaktadır. Basit elemanların seri ve paralel olarak bağlanmasıyla ortaya çıkan karmaşık sistemlerin matematiksel modelleri de kolayca elde edilmektedir. Burada ele alınan sistem elemanları idealleştirilmiş elemanlar olup gerektiğinde çalışma bölgesi içinde lineerleştirilmiştir.

Enerji ifadesi bir zaman aralığında harcanan gücün toplamı olduğundan

 (3.8)

Örneğin bir yayın kuvvet-deplasman ilişkisi . Buradan, uç değişken ve iç değişken kullanılarak bir yayda depolanan potansiyel enerji:

 (3.9)

Benzer bir şekilde hareket eden bir kütlenin kinetik enerjisi , , ve ton’s uç ve iç değişkenleri kullanılarak ve Newton’un hareket kanunundan:

 (3.10)

Elektriksel bir direncin harcadığı güç:

 (3.11)

Burada *v* elektriksel gerilim, *i* akımdır ve .

Kinetik, potansiyel enerji ve harcanan güç bağıntıları diğer sistemler için benzer şekilde bulunabilir. Aşağıda bazı sistemlerin uç ve iç değişkenleri tablo olarak verilmiştir.

Görülmektedir ki sistemlerin değişkenleri ve fiziksel modellenmeleri arasında benzerlikler vardır. Bu durum örneğin üzerinde çalışılacak olan büyük, pahalı ve karmaşık bir mekaniksel sistemin elektriksel karşılığı şeklinde modellenmesine olanak sağlayarak sistemin analizini kolaylaştırır.

Aşağıdaki tabloda elektriksel, mekanik, akışkan ve ısıl sistem elemanlarının transfer fonksiyonları verilmiştir.



**Enerji depolamayan ve sönümlemeyen sistem elemanları:**

Bu elemanlar sadece enerjiyi bir formdan başka bir forma dönüştürürler. Örneğin, mekanikten dönel hareketin veya elektriksel enerjiden mekanik enerji elde edilmesi gibi.

Elektriksel değiştiriciler (Transformatörler)

Mekaniksel değiştiriciler (dişli takımları)

Elektro-Mekanik değiştiriciler (Elektrik motorları)

Sinyal değiştiriciler (Transducer, sensörler)

**3.6. Elektriksel Sistem Elemanları**

İki uçlu basit elektriksel elemanlar olarak direnç, kapasite ve indüktansı sayabiliriz. Bunlar enerjiyi yutan, veya depolayan elemanlardır. Elektriksel sistemlerde ayrıca enerjiyi module eden kuvvetlendiriciler ve başka enerji türünü elektriksel enerjiye dönüştüren (transducer) şeklinde çok uçlu elemanlarda vardır.

**3.6.1. Direnç Elemanı:**

Bir direnç elemanının uçlarına bir gerilim farkı (e) uygulandığında, bir elektriksel akım (I) meydana gelir.



Şekil 3.3. Direnç elemanı.

Bir direncin matematiksel modeli Ohm yasasından bulunur:

İdeal direnç elemanında R direnci sabittir ve akım ile gerilim farkından bağımsızdır. Bir direnç elemanın üzerine giriş olarak gerilim farkı uygulanırsa çıkış olarak akım alınır. Bu durumda direnç elemanının transfer fonksiyonu yukarıdaki denklemin Laplace dönüşümü alınarak bulunabilir:

**3.6.2. Kapasite Elemanı:**



Şekil. 3.4. Kapasite elemanı

Şekil 3.4 ile verilen ideal bir kondansatörün uçlarına bir potansiyel farkı uygulanırsa meydana gelen elektrik yükü (q, coulomb) ile kapasite C (farad) arasındaki bağıntı .

Her iki tarafın türevi alınacak olursa

veya

elde edilir ve burada birim zamanda akan elektrik yükü *i=dq/dt* akımı verir.

Gerilimin sistem girişi olduğu durumda kapasite elemanın transfer fonksiyonu başlangıç değerler sıfır kabul edilerek sistem modelinin Laplace dönüşümü alınarak bulunur.

Benzer şekilde sistem girişi akım alınırsa transfer fonksiyonu

olur.

**3.6.3. Indüktans elemanı**

İletken bir telden meydana gelmiş bir sargıdan bir akım geçirilecek olursa bir mıknatıs alanı oluşur ve akım zamanın fonksiyonu olarak değiştirilince de mıknatıs alanının yoğunluğu da zamana bağlı olarak değişir. Lenz yasasına göre, değişen mıknatıs alanı ise iletken sargı içinde akım değişimine karşı koyacak yönde bir gerilim farkı meydana getirir. İdeal bir indüktans şekil 3.5’te verilmiştir.



Şekil 3.5. İndüktans elemanı

İdeal bir indüktansın dinamiği,

veya

ifade edilir. L: Henry cinsinden sargının indüktansıdır.

Gerilim farkının giriş ve akımın çıkış olduğu durumda indüktans elemanın transfer fonksiyonu

Akımın giriş ve gerilim farkının çıkış olduğu durumda ise transfer fonksiyonu

olur.

**3.7. Mekaniksel Sistemler**

Mekaniksel sistemlerin hareket denklemleri Newton yasası kullanılarak elde edilir. Mekaniksel sistemler Öteleme ve Dönel Mekanik sistemler olarak ikiye ayrılır. Öteleme hareketinde sönümleyici (damper), kütle ve yay, dönel mekanik sistemlerde ise dönel sönümleyici, eylemsizlik momenti (atalet) ve burulma yayı basit sistem elemanlarıdır. Şekil 3.6.’da basit mekaniksel sistem elemanları gösterilmiştir.



Şekil 3.6 Öteleme hareketi yapan basit mekanik sistem elemanları (a) Kütle (b) Damper (c) Yay.

**3.7.1. Direnç (sönümleme) Elemanı:**

Burada ele alınacak sönümleme elemanları doğrusal davranış gösteren, viskoz sürtünmenin geçerli olduğu damperlerdir. Durağan veya Coloumb sürtünmesi gibi doğrusal olmayan sönüm şekilleri kapsam dışındadır.

1. *Öteleme Mekanik:*

**İdeal Damper:**

Damper adı verilen mekaniksel sönümleyiciler üzerlerine uygulanan hareketi ısıya dönüştürerek mekaniksel enerjiyi sönümlerler. Sürtünme hareketi viskoz olduğu durumda sürtünme kuvveti hızla doğru orantılıdır. İdeal bir damperin hareket denklemi

olarak elde edilir. Burada b (N.s/m) sürtünme veya sönüm katsayısıdır. Yukarıdaki denklemin Laplace transformu alındığında sönüm elemanının transfer fonksiyonu aşağıdaki gibi bulunur.

Mekanik direnç:

1. *Dönel Sistemler*

**İdeal Dönel Damper:**

Dönme hareketine ters yönde tepki vererek hareketi sönümlemeye yarayan dönel damperin denklemi aşağıda verilmiştir.

Burada dönel sönüm katsayısı, ω açısal hız ve θ ise açısal yer değiştirmedir. Dönel sönümleyicinin transfer fonksiyonu

olarak bulunur. Mekanik direnç:

**3.7.2. Kapasite Elemanları:**

(a) *Öteleme Mekanik sistemler:*

**İdeal Kütle:**

Sönümleme ve yay etkisi ihmal edilen bir katı cisim ideal bir kütle elemanı olarak modellenebilir. Kütle enerjiyi kapasitif etki ile depolayan elemandır. Hareket denklemi Newton yasasının uygulanması ile aşağıdaki gibi bulunur.

Burada *a* ivme, *v* hız ve *x* ise kütlenin yer değiştirmesidir. Kütle elemanının uç ve iç değişken türünden transfer fonksiyonu:

Mekanik kapasite:

1. *Dönel sistemler:*

**İdeal Dönel Kütle:**

Dönel sistemlerde kapasitif eleman dönen cismin eylemsizlik momentidir J (kg\*m2). Dönel cisme bir moment uygulandığında sistem üzerindeki net moment Newton yasası kullanılarak aşağıdaki gibi elde edilir.

Burada α (rad/s2) açısal ivmedir. Dönel kütle için transfer fonksiyonu

olarak bulunur. Mekanik kapasite:

**3.7.3. İndüktans Elemanları**

1. *Öteleme sistemleri:*

**İdeal Yay:** Kütlesi ve sönümleyiciliği ihmal edilen ve bir kuvvet karşısında kuvvete orantılı geçici şekil değişikliğine uğrayan katı cisimlere yay denir. Yaylar mekaniksel enerjiyi potansiyel enerji şeklinde depolar. Eğer üzerlerine fazla bir yük uygulanırsa yaylar doğrusal olmayan davranış gösterirler. Doğrusal bir yay için hareket denklemi:

Burada k yayın esneklik sabitidir. İdeal bir yayın transfer fonksiyonu ise

olarak bulunur. Mekanik indüktans:

(b) *Dönel Sistemler:*

**İdeal Dönel Yay:** Öteleme yayının dönel sistemlerdeki karşılığı dönel yaydır ve hareket denklemi

olarak verilir. Dönel yayın transfer fonksiyonu aşağıda verilmiştir.

Mekanik indüktans:

**3.8. EMPEDANS KAVRAMI**

* + 1. **Giriş**

Sistemlerin giriş değişkeni **iç değişken** ve çıkış değişkeni de **uç değişken** ise bu ikisi arasındaki ilişkiyi **s** bölgesinde (domeninde) gösteren transfer fonksiyonuna Empedans denir.

Elektrik sistemlerinde voltajın akıma oranı olarak tarif edilebilir. En basit anlamda empedans, **R** direncidir. Genel anlamda empedans ise **Genelleştirilmiş Direnç** olarak bilinir.

* Direnç için    olur.
* Kapasitör için    olur.
* İndüktans için    olur.

Basit sistemler için Transfer fonksiyonu  dir.

Basit elemanların seri veya paralel bağlanması sonucu sistemler oluşur. Eleman gruplarının, sistemlerin incelenmesinde uç değişken **E** ve iç değişken **I**‘yı birbirine **E = Z I** olarak bağlayan bağıntıda **Z** empedanstır.

* + 1. **Elektriksel Empedans Analizi**

**Seri Bağlama:**

|  |  |
| --- | --- |
| İç değişken | aynıdır |
| Uç değişken | farklıdır |



Şekil 3.7. Seri bağlama.



Seri bağlamada I akımı iç değişken olan bu basit elemanların her birinde aynıdır. Uç değişken olan E potansiyel farkı ise bu elemanların her birinde farklıdır.



**Paralel Bağlama:**

|  |  |
| --- | --- |
| İç değişken | farklıdır |
| Uç değişken | aynıdır |



Şekil 3.8. Paralel bağlama.



